高阶行列式与行列式的性质

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 9 月 22 日

主要内容

排列

为了定义高阶行列式, 我们需要引入排列的**逆序数**的概念.
将[1] $\{1, 2, \cdots, n\}$ 排列成一列 (行), 称为它们的 (全) 排列. 全排列的个数为

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

以 $(1, 2, \cdots, n)$ 作为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的标准排列.

定义

给定一排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 比 p_i 大且排在 p_i 左边的元素个数, 称为 p_i 在这个排列中的**逆序数**. 排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的**逆序数**等于各个元素的逆序数之和. 逆序数为奇 (偶) 数的排列称为**奇 (偶) 排列**.

[1] $\{\}$ 表示不计次序.

例子

例子

考虑 $\{1,2,3\}$ 的排列, 求 $(3,2,1)$ 的逆序数.

解.

元素	逆序数
3	0
2	1(3>2, 但 3 在 2 的左边)
1	2(3>2,2>1, 但在 1 的左边)

排列的逆序数 $= 0 + 1 + 2 = 3$. $\square$

对换

定义

在对换中, 将以下操作称为**对换**: 将两个元素对调, 保持其余元素不动. 将相邻两个元素对换, 称为**相邻对换**.

定理

一个排列中任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

推论

奇 (偶) 排列对换成标准排列的对换次数为奇 (偶) 数.

n 阶行列式

假设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 记它的逆序数为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义

n 阶行列式

假设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 记它的逆序数为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义

$$\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)\in S_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

求和中有 $n!$ 项.

例子

例子

二阶行列式

例子

例子

下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这是因为若要 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 非零，必须有 $p_1 \le 1, p_2 \le 2, \cdots, p_n \le n$. 另外, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + n$. 所以 $p_1 = 1, \cdots p_n = n$.

对于**上三角行列式**也有类似的结论.

例子

利用前面的例子, 可以推得

例子

对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

行列式的性质

假设 $A \in M_{n\times n}$, 以及

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

定义

以下矩阵称为 A 的转置, 即 $(A^T)_{ij} = a_{ji}$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

命题 (性质 1)

行列式等于它的转置行列式: $|A| = |A^T|$.

命题 (性质 2)

对换行列式的两行 (列), 行列式变号.

以二、三阶行列式作为例子.

评述

行和列的地位相同. 行列式的性质凡是对行成立的对列也成立. 反之亦然.

推论

如果行列式两行完全相同，则此行列式为 *0*.

证明.

$|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0.$ □

命题 (性质 3)

若行列式某一行 (列) 乘以常数 k, 则行列式等于原行列式乘以 k, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明.

利用定义. □

命题 (性质 4)

行列式若有两行 (列) 成比例, 则行列式为 0.

证明.

利用推论和性质 3. □

命题 (性质 5)

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

命题 (性质 6)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \ (i \neq j)$$

证明.

利用性质 4 和性质 5. □

评述

1. 性质 2 的推论应用于线性方程组中的现象如下: 两行完全相同, 则对应的方程相斥 (矛盾) 或相同 (取决于常数相异或相同), 则无解或解不唯一 (由 $n-1$ 个方程解 n 个未知数). 无论是其中哪种情形, 系数矩阵不可逆.
2. 性质 6 对应于: 将其中一条方程乘以常数加到另一条方程上.

行列式的计算

例子

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 希望变成上三角行列式.

解.

- 将第 n 行逐行往上移到第 1 行, 交换行 $(n-1)$ 次, 需要乘上因子 $(-1)^{n-1}$.
- 将原先第 $(n-1)$ 行（现在第 n 行）逐行往上移到第 2 行, 交换行 $(n-2)$ 次，需要乘上因子 $(-1)^{n-2}$.
- $\vdots$
- 将原先第 2 行（现在第 n 行）逐行往上移到第 $(n-1)$ 行, 交换行 1 次，需要乘上因子 $(-1)^{1}$.

最终得到行列式 $\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{1n} \end{vmatrix} = a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}$

乘上因子 $(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. $\square$

评述

总是可以通过操作 $r_i + kr_j$（或 $c_i + kc_j$）将行列式化成上（下）三角行列式.

例子

希望化成下三角行列式或有一行（列）中只有一个非零元.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \underset{r_3-10r_1}{\overset{r_2-4r_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+\frac{1}{7}r_2}{\overset{r_3-\frac{15}{7}r_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{80}{7} \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{45}{7} \end{vmatrix} \overset{r_4=-\frac{9}{16}r_3}{=} 0.$$

例子

若行列式有某一行（列）全为 0, 则行列式 =0.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{2r_i}{=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 2\cdot 0 & \cdots & 2\cdot 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 2D.$$

所以 $D = 0$.

例子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}_{=D_1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}}_{=D_2}$$

证明.

利用操作 $r_i + \lambda r_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$ 将 D_1 化成下三角行列式

$$\begin{vmatrix} p_{11} & & & \\ p_{12} & p_{22} & O & \\ \vdots & & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}.$$

利用操作 $c_i + \lambda c_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 将 D_2 化成下三角行列式

$$\begin{vmatrix} q_{11} & & & \\ q_{12} & q_{22} & O & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}.$$

例子

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{上一例子}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2.$$

例子

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \\ c & & & & & d \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ c & & & & & d \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^8 \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & d & & & & \\ & & a & & & b \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & & c & & & d \end{vmatrix} \overset{\text{利用上一例子}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^3 .$$